

Über die assoziierten Primideale der Vervollständigung

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität München

Theresienstr. 39, D-80333 München, Germany

E-mail: zoeschinger@mathematik.uni-muenchen.de

Abstract

Let (R, \mathfrak{m}) be a noetherian local ring and let M be an R -module such that $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n M = 0$. Let \hat{M} be the completion of M . We show that $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$ holds in the following three cases: if $\dim(R) \leq 1$, if \hat{M} as R -module is flat, or if M is the direct sum of R -modules which are finitely generated. If M is pure in \hat{M} then at least $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$ holds. If the conjecture by A.-M.Simon on complete R -modules is valid then one has $\text{Koatt}(M) \subset \text{Ass}(\hat{M})$.

Key Words: Complete modules, pure-injective modules, pure-essential extensions, co-attached primes, Mittag-Leffler modules.

Mathematics Subject Classification (2000): 13B35, 13C11, 13J10.

Einleitung

Sei (R, \mathfrak{m}) ein kommutativer noetherscher lokaler Ring, M ein R -Modul mit $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n M = 0$ und $\hat{M} = \varprojlim M/\mathfrak{m}^n M$ die Vervollständigung von M in der \mathfrak{m} -adischen Topologie. Wir interessieren uns in dieser Arbeit für die Menge $\text{Ass}(\hat{M})$ aller zum R -Modul \hat{M} assoziierten Primideale. Ist M endlich erzeugt, gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Ass}(M)$. Ist M nicht endlich erzeugt, weiß man über die Menge $\text{Ass}(\hat{M})$ sehr wenig. Sie kann viel größer als $\text{Ass}(M)$ sein, wie die Beispiele $M_1 = \prod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}^i$ und $M_2 = \prod_{i=1}^{\infty} (R/\mathfrak{m}^i)^0$ im dritten Abschnitt zeigen (wobei $A^0 =$

$\text{Hom}_R(A, E)$ das Matlis-Duale des R -Moduls A sei): Es ist $\text{Ass}(M_1) = \text{Ass}(M_2) = \{\mathfrak{m}\}$, während nach (3.5) und (3.6) gilt

$$\text{Ass}(\hat{M}_1) = \{\mathfrak{m}\} \cup \text{Ass}(R) \quad \text{und} \quad \text{Ass}(\hat{M}_2) = \text{Spec}(R).$$

Bei beliebigem M scheint die Menge $\text{Koatt}(M)$ ein guter Kandidat für $\text{Ass}(\hat{M})$ zu sein: $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ heißt *koattachiert* zu M , wenn es einen Untermodul U von M gibt mit $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(U)$. Für die rein-injektive Hülle N von M zeigen wir nun $\text{Koatt}(N) = \text{Koatt}(M)$, und falls M rein in \hat{M} ist, entsprechend $\text{Koatt}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$, woraus $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$ folgt. Der Vergleich zwischen \hat{M} und N führt noch weiter, denn mit $N_1/M = P(N/M)$, dem größten radikalvollen Untermodul von N/M , und $H(N_1) = \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n N_1$ gilt nach (1.6)

$$\hat{M} \cong N_1/H(N_1).$$

Daraus folgen die beiden Hauptergebnisse (1.7) und (1.8) des ersten Abschnittes: Ist $\dim(R) \leq 1$ oder \hat{M} als R -Modul flach, so gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$.

Weil im allgemeinen M nicht rein in \hat{M} ist, untersuchen wir im zweiten Abschnitt sogenannte *totalseparierte* R -Moduln, bei denen nicht nur M , sondern alle $X \otimes_R M$, mit X endlich erzeugt, separiert sind. Das ist nach (2.1) genau dann der Fall, wenn die rein-injektive Hülle von M separiert ist. Zusammen mit dem Begriff des Mittag-Leffler-Moduls – für jede Familie $Q_i (i \in I)$ von R -Moduln ist die kanonische Abbildung $M \otimes_R (\prod Q_i) \rightarrow \prod (M \otimes_R Q_i)$ injektiv – erhalten wir die Implikationen

$$M \text{ ist Mittag-Leffler} \implies M \text{ ist totalsepariert} \implies M \text{ ist rein in } \hat{M},$$

und wann hier Umkehrungen gelten, wird in (2.4) bis (2.7) untersucht. Anschließend geben wir neue Beispiele dafür, daß M nicht rein in \hat{M} ist (2.8), ja sogar \hat{M} flach und M nicht flach ist (2.9).

Der dritte und letzte Abschnitt hat als Ziel, die Formel

$$\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$$

für jeden R -Modul M zu zeigen, der direkte Summe von endlich erzeugten (allgemeiner koatomaren) Moduln ist (3.4). Ob diese Formel für jeden separierten R -Modul M gilt, ist ein ungelöstes Problem und hängt eng mit der von Simon 1990 gestellten Frage zusammen, ob $\text{Supp}(M) = V(\text{Ann}_R(M))$ für jeden *vollständigen* R -Modul M gilt (3.7).

1 Über die Inklusion $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$

Die Menge $\text{Koatt}(M)$ hat gegenüber den assoziierten Primidealen einige Vorteile: Ist $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ Durchschnitt von beliebig vielen koattachierten Primidealen, ist auch $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$, und ist \mathfrak{p} ein Primdivisor von $\text{Ann}_R(M)$, folgt schon $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$. Falls M vollständig ist, gilt noch mehr:

Lemma 1.1 *Ist M vollständig, so ist jedes $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$ Durchschnitt von assoziierten Primidealen.*

Beweis. 1. *Schritt* Es gilt $\bigcap \text{Ass}(M) = \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$. Das folgt wie bei Simon [9, p.243] mit Hilfe des Satzes von Baire: Aus $r \in \bigcap \text{Ass}(M)$ folgt mit der Abkürzung $M[\mathfrak{a}] = \text{Ann}_M(\mathfrak{a})$, daß $M = \bigcup_{n \geq 1} M[r^n]$ ist, also ein $M[r^m]$ einen inneren Punkt besitzt, d.h. $x + \mathfrak{m}^e M \subset M[r^m]$ gilt für ein $x \in M$, $e \geq 1$. Aus $r^m \cdot \mathfrak{m}^e M = 0$ folgt $r^{m+e} \cdot M = 0$, also $r \in \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$.

2. *Schritt* Sei jetzt $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$. Als abgeschlossener Untermodul ist auch $M_1 = M[\mathfrak{p}]$ vollständig, also nach dem 1. Schritt $\bigcap \text{Ass}(M_1) = \sqrt{\text{Ann}_R(M_1)} = \mathfrak{p}$ wie behauptet. \square

Folgerung 1.2 *Ist M vollständig, so gilt $\text{Ass}(M^{00}) = \text{Koatt}(M)$.*

Beweis. Stets ist $\text{Ass}(M^{00}) \subset \text{Koatt}(M^{00}) = \text{Koatt}(M)$, und bei vollständigem M ist $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$ von der Form $\mathfrak{p} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$, alle $\mathfrak{p}_\lambda \in \text{Ass}(M)$, also nach [13, Lemma 2.5] $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M^{00})$. \square

Folgerung 1.3 *Ist M separiert, so ist $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$ äquivalent mit $\text{Koatt}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$.*

Beweis. " \Leftarrow " ist klar, und bei " \Rightarrow " ist jedes $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(\hat{M})$ von der Form $\mathfrak{p} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$, alle $\mathfrak{p}_\lambda \in \text{Ass}(\hat{M})$. Nach Voraussetzung ist dann jedes $\mathfrak{p}_\lambda \in \text{Koatt}(M)$, also auch $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$. \square

Ein R -Modul A heißt *radikalvoll*, wenn $\mathfrak{m}A = A$ gilt. Ist A beliebig, sei $P(A)$ der größte radikalvolle Untermodul von A , und falls $P(A) = 0$ ist, heißt A *reduziert*.

Lemma 1.4 *Sei M vollständig und U ein Untermodul von M . Genau dann ist U vollständig, wenn M/U reduziert ist.*

Beweis. " \Rightarrow " Mit $M_1/U = P(M/U)$ gilt $U + \mathfrak{m}M_1 = M_1$, wegen der Vollständigkeit von U also nach Simon [9, p.232, Lemma] $U + H(M_1) = M_1$, wegen $H(M) = 0$ also $U = M_1$.

" \Leftarrow " Nach Jensen [5, Proposition 3] ist ein R -Modul A genau dann vollständig, wenn er kotorsion und separiert ist, d.h. wenn $\text{Ext}_R^1(C, A) = 0$ ist für alle flachen R -Moduln C und $H(A) = 0$. Mit Hilfe eines Basis-Untermoduls B von C (siehe [6, Theorem 7.10]) kann man C flach und radikalvoll annehmen, und dann ist in der exakten Folge

$$\text{Hom}_R(C, M/U) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(C, U) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(C, M)$$

auch das erste Glied nach Voraussetzung Null, also U kotorsion, U vollständig wie behauptet. \square

Lemma 1.5 *Ist $M \subset N$ eine rein-injektive Hülle von M , so gilt:*

- (a) $Koatt(N) = Koatt(M)$.
- (b) $H(N)$ ist radikalvoll und rein-injektiv.
- (c) $N/H(N)$ ist direkter Summand eines Produktes von Moduln endlicher Länge.

Beweis.

- (a) Die kanonische Abbildung $\alpha : M \rightarrow M^{00}$ läßt sich, weil $M \subset N$ rein-wesentlich ist, zu einem Monomorphismus $\beta : N \rightarrow M^{00}$ hochheben und es folgt $Koatt(N) \subset Koatt(M^{00}) = Koatt(M)$, während " \supset " klar ist.
- (b) *1. Schritt* Zu jedem R -Modul N gibt es einen reinen Monomorphismus $N \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$, in dem alle A_i artinsch sind. Klar ist $N \rightarrow N^{00}$ ein reiner Monomorphismus, so daß mit $D = N^0$ nur noch ein reiner Monomorphismus $D^0 \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ anzugeben ist: Ist $\{B_i \mid i \in I\}$ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von D , wird $\prod_{i \in I} B_i \twoheadrightarrow D$ ein reiner Epimorphismus, also $D^0 \rightarrow \prod_{i \in I} (B_i)^0$ ein zerfallender Monomorphismus, und alle $(B_i)^0$ sind artinsch.
2. Schritt Ist jetzt wie in der Voraussetzung N rein-injektiv, zerfällt $N \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$, also auch $H(N) \rightarrow \prod_{i \in I} H(A_i)$. Jedes der $H(A_i)$ ist aber radikalvoll und rein-injektiv, also auch ihr Produkt, also auch der direkte Summand $H(N)$.
- (c) Der zerfallende Monomorphismus $N \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ induziert einen zerfallenden Monomorphismus $N/H(N) \rightarrow \prod_{i \in I} A_i/H(A_i)$, in dem alle $A_i/H(A_i)$ artinsch und separiert, also von endlicher Länge sind.

□

Folgerung 1.6 Sei M separiert, $M \subset N$ eine rein-injektive Hülle von M und $N_1/M = P(N/M)$. Dann ist N_1 kotorsion und

$$\hat{M} \cong N_1/H(N_1).$$

Beweis. Nach (1.5c) ist $N/H(N)$ vollständig, und weil $H(N)$ nach (1.5b) radikalvoll, also in N_1 enthalten ist, gilt sogar $H(N) = H(N_1)$. Weil N/N_1 reduziert ist, ist nach (1.4) auch $N_1/H(N_1)$ vollständig, und weil wieder nach (1.5b) $H(N_1)$ kotorsion ist, ist das auch N_1 .

Bleibt zu zeigen, daß der kanonische Monomorphismus $\alpha : M \rightarrow N_1/H(N_1)$ auf den Vervollständigungen einen Isomorphismus $\hat{\alpha}$ induziert, d.h. in $\overline{N_1} = N_1/H(N_1)$ der Untermodul $\overline{M} = \text{Bild } \alpha$ ein dichter Unterraum bezüglich der \mathfrak{m} -adischen Topologie ist: Aus $M + \mathfrak{m} \cdot N_1 = N_1$ folgt $\overline{M} + \mathfrak{m} \cdot \overline{N_1} = \overline{N_1}$, so daß nur noch $\overline{M} \cap \mathfrak{m}^n \cdot \overline{N_1} = \mathfrak{m}^n \cdot \overline{M}$ für alle $n \geq 1$ zu zeigen ist, und das ist klar wegen $(M + H(N_1)) \cap \mathfrak{m}^n \cdot N_1 = \mathfrak{m}^n \cdot M + H(N_1)$. □

Satz 1.7 *Ist M separiert und $\dim(R) \leq 1$, so gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$.*

Beweis. 1. Schritt Allein aus $\dim(R) \leq 1$ folgt für jeden sockelfreien R -Modul B und jeden radikalvollen Untermodul A , daß auch B/A sockelfrei ist: Wegen $\mathfrak{m} \notin \bigcup \text{Ass}(A) \cup \bigcup \text{Koass}(A)$ gibt es ein $r \in \mathfrak{m}$, das bijektiv auf A operiert, so daß $\text{Ext}_R^1(k, A) = 0$ ist und aus $\text{Hom}_R(k, B) \rightarrow \text{Hom}_R(k, B/A) \rightarrow 0$ die Behauptung folgt.

2. Schritt Für " \subset " sei $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(\hat{M})$: Falls $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, ist \mathfrak{p} minimal über $\text{Ann}_R(\hat{M}) = \text{Ann}_R(M)$, also $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$. Falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, ist $\text{So}(\hat{M}) \neq 0$, mit den Bezeichnungen von (1.6) also $\text{So}(N_1/H(N_1)) \neq 0$. Nach dem ersten Schritt folgt $\text{So}(N_1) \neq 0$, $\mathfrak{m} \in \text{Koatt}(N_1) \subset \text{Koatt}(N)$, also nach (1.5a) $\mathfrak{m} \in \text{Koatt}(M)$.

3. Schritt Für " \supset " gilt ohne jede Beschränkung an $\dim(R)$: Ist M separiert und $\text{Ass}(\hat{M})$ endlich, folgt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(\hat{M})$. Jedes $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(\hat{M})$ ist ja nach (1.1) von der Form $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m$ mit $\mathfrak{p}_i \in \text{Ass}(\hat{M})$, und daraus folgt $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(\hat{M})$. \square

Satz 1.8 *Sei M separiert und \hat{M} als R -Modul flach. Mit einer rein-injektiven Hülle $M \subset N$ gilt dann:*

(a) N/M ist radikalvoll und $H(N) \subset^\oplus N$.

(b) $\hat{M} \cong N/H(N)$.

(c) $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$.

Beweis.

(a) Nach (1.6) ist $\hat{M} \cong N_1/H(N_1)$, also $H(N_1)$ rein in N_1 , und weil $H(N_1) = H(N)$ nach (1.5b) rein-injektiv ist, folgt $H(N_1) \oplus X = N_1$. Der vollständige flache R -Modul $X \cong \hat{M}$ ist nach Jensen [5, Proposition 4] rein-injektiv, so daß auch N_1 rein-injektiv ist und aus der Minimalitätseigenschaft der rein-injektiven Hülle folgt $N_1 = N$. Damit sind beide Punkte bewiesen, ebenso (b).

(c) " \subset " Ist \mathfrak{p} assoziiert zu $\hat{M} \cong N/H(N)$, folgt wegen $H(N) \subset^\oplus N$ sogar $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(N)$, also wieder nach (1.5a) $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$.

" \supset " Wie im dritten Beweisschritt von (1.7), denn zu jedem flachen R -Modul C gibt es einen reinen Epimorphismus $R^{(I)} \rightarrow C$, so daß $\text{Ass}(C) \subset \text{Ass}(R)$ endlich ist.

\square

Über einem diskreten Bewertungsring ist nach Fuchs, Salce und Zanardo [3, Lemma 5] ein reiner Untermodul A von B genau dann rein-wesentlich in B , wenn B/A teilbar und A^1 groß in B^1 ist. Erstaunlicherweise gilt die Implikation " \Leftarrow " über jedem noetherschen lokalen Ring:

Lemma 1.9 *Sei A ein reiner Untermodul von B und B/A radikalvoll, $H(A)$ groß in $H(B)$. Dann ist A sogar rein-wesentlich in B .*

Beweis. Sei $X \subset B$, $X \cap A = 0$ und $(X \oplus A)/X$ rein in B/X . Wir müssen zeigen, daß $X = 0$ ist.

Zunächst ist $X \subset H(B)$, denn für alle $n \geq 1$ gilt mit $\mathfrak{c} = \mathfrak{m}^n$ und $\overline{B} = B/X$, daß nach Voraussetzung $\overline{A} \cap \mathfrak{c} \cdot \overline{B} = \mathfrak{c} \cdot \overline{A}$ ist, also $X \cap (A + \mathfrak{c}B) = X \cap \mathfrak{c}B$: $x \in X \cap (A + \mathfrak{c}B) \Rightarrow x - a \in \mathfrak{c}B$, $\bar{a} \in \overline{A} \cap \mathfrak{c} \cdot \overline{B}$, $\bar{a} \in \mathfrak{c} \cdot \overline{A}$, $a \in \mathfrak{c}A$ wegen $X \cap A = 0$, also $x \in \mathfrak{c}B$. Weil nach Voraussetzung B/A radikalvoll, also $A + \mathfrak{c}B = B$ ist, folgt $X \subset \mathfrak{c}B = \mathfrak{m}^n B$.

Aus $X \subset H(B)$ und $X \cap H(A) = 0$ folgt mit der dritten Bedingung $X = 0$. □

Folgerung 1.10 *Ist M separiert und M rein in \hat{M} , so gilt:*

- (a) M ist rein-wesentlich in \hat{M} .
- (b) M ist totalreduziert, d.h. für jeden endlich erzeugten R -Modul X ist $X \otimes_R M$ reduziert.
- (c) $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$.

Beweis.

- (a) $A = M$ und $B = \hat{M}$ erfüllen die Voraussetzungen von (1.9), denn natürlich ist \hat{M}/M radikalvoll und sogar $H(\hat{M}) = 0$.
- (b) Mit einer exakten Folge $R^n \xrightarrow{\alpha} R^m \xrightarrow{\beta} X \rightarrow 0$ ist auch $R^n \otimes_R \hat{M} \rightarrow R^m \otimes_R \hat{M} \rightarrow X \otimes_R \hat{M} \rightarrow 0$ exakt, also $\text{Kern}(\beta \otimes 1)$ als Faktormodul von $R^n \otimes_R \hat{M}$ vollständig. Nach (1.4) ist deshalb $X \otimes_R \hat{M}$ reduziert, also auch der Untermodul $X \otimes_R M$.
- (c) Die rein-injektive Hülle $M \subset N$ läßt sich, weil jetzt $M \subset \hat{M}$ rein-wesentlich ist, zu einem Monomorphismus $\hat{M} \rightarrow N$ hochheben, und wieder mit (1.5a) folgt $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Ass}(N) \subset \text{Koatt}(M)$.

□

Bemerkung 1.11 Ohne die Reinheit von M in \hat{M} gilt (b) nicht einmal für $X = R/\mathfrak{p}$: Nach Griffith [4, p.323] gibt es über jedem 2-dimensionalen, abzählbaren, regulären Ring R einen flachen Untermodul $M \subset R^{(\mathbb{N})}$ und ein Primideal $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$, so daß $M/\mathfrak{p}M$ den Quotientenkörper von R/\mathfrak{p} enthält, also nicht reduziert ist.

Frage 1 Für welche separierten R -Moduln M gilt $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$?

2 Totalseparierte Moduln

Ein R -Modul M heiße *totalsepariert*, wenn $X \otimes_R M$ separiert ist fur jeden endlich erzeugten R -Modul X . Natürlich ist jeder endlich erzeugte R -Modul totalsepariert, allgemeiner jeder koatomare R -Modul M , denn dann ist $\mathfrak{m}^e M$ endlich erzeugt fur ein $e \geq 1$, also auch $X \otimes_R M$ koatomar, insbesondere separiert. ber einem diskreten Bewertungsrings R ist sogar jeder separierte R -Modul M bereits totalsepariert, denn X ist von der Form $X \cong R/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{a}_n$, und weil offenbar alle $R/\mathfrak{a}_i \otimes_R M \cong M/\mathfrak{a}_i M$ separiert sind, ist es auch $X \otimes_R M$.

Lemma 2.1 *Fur einen R -Modul M sind quivalent:*

- (i) M ist totalsepariert.
- (ii) Die kanonische Abbildung $M \rightarrow \prod_{n \geq 1} M/\mathfrak{m}^n M$ ist ein reiner Monomorphismus.
- (iii) Die rein-injektive Hulle N von M ist separiert.

Beweis. $(i \rightarrow ii)$ Wir müssen zeigen, daß fur jeden endlich erzeugten R -Modul X die kanonische Abbildung $X \otimes_R M \rightarrow X \otimes_R (\prod_{n \geq 1} M/\mathfrak{m}^n M)$ injektiv ist. Nach Voraussetzung ist nun $X \otimes_R M$ separiert, d.h. die Abbildung $X \otimes_R M \rightarrow \prod_{n \geq 1} (X \otimes_R M) \otimes_R R/\mathfrak{m}^n \cong \prod_{n \geq 1} (X \otimes_R M/\mathfrak{m}^n M)$ injektiv, und weil $X \otimes_R -$ mit beliebigen Produkten vertauscht, ist das die Behauptung.

$(ii \rightarrow iii)$ Ein beliebiges Produkt von reinen Epimorphismen $\beta_i : B_i \rightarrow C_i$ ist wieder rein, denn fur jeden endlich erzeugten R -Modul X sind alle $\text{Hom}_R(X, B_i) \rightarrow \text{Hom}_R(X, C_i)$ surjektiv fur $i \in I$, also auch $\text{Hom}_R(X, \prod_{i \in I} B_i) \rightarrow \text{Hom}_R(X, \prod_{i \in I} C_i)$.

Ist nun $M \subset N$ eine rein-injektive Hulle, sind alle $\alpha_n : M/\mathfrak{m}^n M \rightarrow N/\mathfrak{m}^n N$ reine Monomorphismen, also im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \subset & N \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \prod_{n \geq 1} M/\mathfrak{m}^n M & \xrightarrow{\alpha} & \prod_{n \geq 1} N/\mathfrak{m}^n N \end{array}$$

auch $\alpha = \prod \alpha_n$ ein reiner Monomorphismus. Weil die kanonische Abbildung f nach Voraussetzung rein ist, folgt aus der Definition von rein-wesentlich, daß g injektiv, d.h. $\text{Kern } g = H(N) = 0$ ist.

(iii \rightarrow i) N ist separiert, also nach (1.5c) direkter Summand von $\prod_{i \in I} Y_i$, wobei alle Y_i von endlicher Länge sind. Klar sind alle Y_i totalsepariert, also auch $\prod_{i \in I} Y_i$, also auch der reine Untermodul M . \square

Folgerung 2.2 *Für einen separierten R -Modul M sind äquivalent:*

- (i) $M \subset \hat{M}$ ist eine rein-injektive Hülle.
- (ii) M ist totalsepariert und N/M radikalvoll.

Beweis. (i \rightarrow ii) Stets ist \hat{M}/M radikalvoll, und weil \hat{M} rein-injektiv und separiert, also nach (1.5c) totalsepariert ist, ist das auch der nach Voraussetzung reine Untermodul M .

(ii \rightarrow i) Aus der zweiten Bedingung folgt nach (1.6) $\hat{M} \cong N/H(N)$, aus der ersten nach (2.1) $H(N) = 0$. \square

Bemerkung 2.3 Für eine rein-wesentliche Erweiterung $A \subset B$ folgt unmittelbar aus der Definition, daß jeder endlich erzeugte reine Untermodul von B/A bereits Null ist. Speziell über einem diskreten Bewertungsring R sieht man mit Hilfe eines Basis-Untermoduls, daß dann B/A sogar radikalvoll ist, und weil jeder separierte R -Modul nach der Einleitung bereits totalsepariert ist, erhält man:

Über einem diskreten Bewertungsring R gilt für jeden separierten R -Modul M , daß $M \subset \hat{M}$ eine rein-injektive Hülle ist.

Satz 2.4 *Sei M separiert und \hat{M} als R -Modul flach. Dann sind äquivalent:*

- (i) M ist totalsepariert.
- (ii) Für jedes Primideal \mathfrak{p} von R ist $M/\mathfrak{p}M$ separiert.
- (iii) M ist rein in \hat{M} .

Falls R vollständig, ist das weiter äquivalent mit

- (iv) M ist ein Mittag-Leffler-Modul.

Beweis. (i \rightarrow ii) ist klar, weil $X \otimes_R M$ speziell für $X = R/\mathfrak{p}$ separiert ist.

(ii \rightarrow iii) Für jedes Ideal \mathfrak{a} von R gilt: Ist $M/\mathfrak{a}M$ separiert, folgt $M \cap \mathfrak{a}\hat{M} = \mathfrak{a}M$, denn mit $P = \prod_{n \geq 1} M/\mathfrak{m}^n M$ ist die kanonische Abbildung $M/\mathfrak{a}M \rightarrow \prod_{n \geq 1} (M/\mathfrak{a}M \otimes_R R/\mathfrak{m}^n) \cong P/\mathfrak{a}P$ injektiv, also sogar $M \cap \mathfrak{a}P = \mathfrak{a}M$.

Unter unseren Voraussetzungen ist deshalb $\text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{p}, \hat{M}/M) = 0$ für jedes Primideal \mathfrak{p} , also sogar $\text{Tor}_1^R(X, \hat{M}/M) = 0$ für jeden endlich erzeugten R -Modul X , und das bedeutet, daß \hat{M}/M flach, also M rein in \hat{M} ist.

(iii \rightarrow i) Jeder vollständige flache R -Modul ist wieder nach Jensen [5, Proposition 4] rein-injektiv, insbesondere nach (1.5c) totalsepariert. Mit \hat{M} ist also auch der nach Voraussetzung reine Untermodul M totalsepariert.

(iv \rightarrow i) gilt auch ohne die Vollständigkeit von R . Ein R -Modul M heißt nach Raynaud und Gruson [7, 2.1.5] *Mittag-Leffler-Modul*, wenn für jede Familie $(Q_i | i \in I)$ von R -Moduln die kanonische Abbildung $M \otimes_R (\prod Q_i) \rightarrow \prod (M \otimes_R Q_i)$ injektiv ist. M ist dann separiert, denn zu jedem $x \in H(M)$ gibt es nach [7, 2.2.1] einen rein-projektiven Untermodul U von M , so daß $x \in U$ und U rein in M ist: Aus dem ersten folgt $H(U) = 0$, aus dem zweiten $x \in U \cap H(M) = H(U)$, also $x = 0$.

M ist sogar totalsepariert, denn für jeden endlich erzeugten R -Modul X ist $X \otimes_R M$ wieder ein Mittag-Leffler-Modul: Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
(X \otimes_R M) \otimes_R (\prod Q_i) & \xrightarrow{\gamma} & \prod ((X \otimes_R M) \otimes_R Q_i) \\
\cong \swarrow & & \downarrow \cong \\
M \otimes_R (X \otimes_R \prod Q_i) & & \\
\beta \cong \searrow & & \\
M \otimes_R (\prod (X \otimes_R Q_i)) & \xrightarrow{\alpha} & \prod (M \otimes_R (X \otimes_R Q_i))
\end{array}$$

ist nach Voraussetzung α injektiv, ebenso β wegen X endlich erzeugt, also auch γ wie behauptet.

(ii \rightarrow iv) Nach dem bereits Bewiesenen ist auch M flach, also M nach [7, 2.5.3] wegen der Vollständigkeit von R ein Mittag-Leffler-Modul. \square

Folgerung 2.5 Ist $\dim(R) \leq 1$, so ist jeder separierte flache R -Modul bereits totalsepariert.

Beweis. Mit Punkt (ii) des Satzes: Natürlich ist $M/\mathfrak{m}M$ separiert, und bei $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ läßt sich R/\mathfrak{p} in R einbetten, also auch $M/\mathfrak{p}M$ in M , so daß $M/\mathfrak{p}M$ separiert ist. \square

Bemerkung 2.6 Die Implikation (i \rightarrow iv) im Satz gilt nicht mehr, sobald R unvollständig ist: Aus der rein-exakten Folge $0 \rightarrow R \rightarrow \hat{R} \rightarrow \hat{R}/R \rightarrow 0$ folgt mit $C = \hat{R}/R$, daß $0 \rightarrow \hat{R} \rightarrow \hat{R} \otimes_R \hat{R} \rightarrow \hat{R} \otimes_R C \rightarrow 0$ zerfällt und $\hat{R} \otimes_R C$ radikalvoll $\neq 0$ ist, also

$\hat{R} \otimes_R \hat{R}$ einen radikalvollen direkten Summanden $\neq 0$ besitzt. Damit ist $\hat{R} \otimes_R \hat{R}$ kein Mittag-Leffler-Modul, also auch nicht $M = \hat{R}$, obwohl M totalsepariert ist.

Bemerkung 2.7 Die Implikation $(iii \rightarrow i)$ im Satz gilt auch dann, wenn M separiert und $M/\mathfrak{m}M$ endlich erzeugt ist: Weil dann $M/\mathfrak{m}M \rightarrow M^{00}/\mathfrak{m} \cdot M^{00}$, also auch $M/\mathfrak{m}M \rightarrow N/\mathfrak{m}N$ ein Isomorphismus ist, ist N/M radikalvoll und nach (1.6) $\hat{M} \cong N/H(N)$, also \hat{M} nach (1.5c) totalsepariert. Wie in (2.4, $iii \rightarrow i$) folgt die Behauptung.

Der in (1.11) angegebene Modul aus [4] ist ein erstes Beispiel dafür, daß ein separierter flacher R -Modul A nicht rein in \hat{A} sein muß. Wir wollen jetzt eine ganze Reihe von solchen Beispielen angeben, die auf folgendem Prinzip beruhen: Ist M separiert und $M \subset A \subset \hat{M}$ ein Zwischenmodul, so folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M/\mathfrak{m}^n M & \xrightarrow{\cong} & \hat{M}/\mathfrak{m}^n \hat{M} \\ & \searrow & \nearrow \\ & A/\mathfrak{m}^n A & \end{array}$$

daß A genau dann ein dichter Unterraum von \hat{M} , d.h. $\hat{A} = \hat{M}$ ist, wenn A/M radikalvoll ist. Aber A muß keineswegs rein in \hat{M} sein:

Beispiel 2.8 Sei R ein unvollständiger Integritätsring mit $\dim(R) \geq 2$, so daß R/\mathfrak{a} vollständig ist für alle Ideale $\mathfrak{a} \neq 0$. Dann gibt es einen separierten flachen R -Modul A , so daß $A/\mathfrak{m}A$ einfach ist, aber A nicht rein in \hat{A} .

Beweis. Nach Rotthaus [8, 1.4] gibt es zu jedem $n \geq 2$ einen Integritätsring R mit $\dim(R) = n$ und der gewünschten Eigenschaft. Nach [12, Beispiel 2.4] ist dann $\text{Koass}_R(\hat{R}) = \{0, \mathfrak{m}\}$, also $\text{Koass}_R(\hat{R}/R) = \{0\}$, d.h. $\hat{R}/R \cong K^{(I)}$ mit $K = \text{Quot}(R)$ und $I \neq \emptyset$. Mit irgendeinem $0 \neq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ ist dann $X = R_{\mathfrak{p}}$ ein flacher, radikalvoller Untermodul von K , aber nicht rein in K . Wählt man Zwischenmoduln $R \subset A \subset B \subset \hat{R}$ mit $B/R \cong K$, $A/R \cong X$, so ist A separiert und flach, $A/\mathfrak{m}A$ einfach, A nicht rein in $\hat{R} = \hat{A}$. \square

Bemerkung 2.9 Ist M wie in der Voraussetzung zu (2.4) separiert und \hat{M} als R -Modul flach, muß M selbst nicht flach sein (so daß insbesondere M nicht rein in \hat{M} ist). Ein Beispiel dazu geben Bartijn und Strooker in [1, Example 3.11a], weitere folgen mit unserer Konstruktion in (2.8): Ist R ein Integritätsring mit $\dim(R) \geq 3$, so gibt es einen Untermodul X von K , der radikalvoll, aber nicht flach ist. Ist zusätzlich $\text{Koass}_R(\hat{R}) = \{0, \mathfrak{m}\}$ und $R \subset A \subset B \subset \hat{R}$ wie in (2.8), wird $\hat{A} = \hat{R}$ flach, obwohl $A/\mathfrak{m}A$ einfach und A nicht flach ist.

In unseren Beweisen wurde mehrfach benützt, daß ein vollständiger, flacher R -Modul rein-injektiv, also totalsepariert ist.

Frage 2 Ist jeder vollständige R -Modul M totalsepariert?

3 Direkte Summen von koatomaren Moduln

Für jeden koatomaren R -Modul M gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$: Weil M totalsepariert, also rein in \hat{M} ist, gilt $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$, und wegen $\text{Koatt}(M) = \text{Ass}(M)$ folgt die Behauptung. Wir wollen mit einigem Aufwand dieselbe Formel für beliebige direkte Summen von koatomaren R -Moduln beweisen.

Lemma 3.1 *Sei $M = \coprod_{i \in I} M_i$ separiert und seien alle M_i rein in \hat{M}_i . Dann ist auch M rein in \hat{M} .*

Beweis. Nach Simon [9, p.244] kann man \hat{M} als Modul zwischen $\coprod \hat{M}_i$ und $\prod \hat{M}_i$ auffassen, nämlich

$$(*) \quad \hat{M} = \{(x_i) \in \prod \hat{M}_i \mid \text{Für jedes } n \geq 1 \text{ gilt: Fast alle } x_i \in \mathfrak{m}^n \cdot \hat{M}_i\}.$$

Stets ist $\coprod \hat{M}_i$ rein in $\prod \hat{M}_i$, also erst recht in \hat{M} , und weil nach Voraussetzung alle M_i rein in \hat{M}_i , also auch $\coprod M_i$ rein in $\coprod \hat{M}_i$ ist, folgt die Behauptung. \square

Folgerung 3.2 *Ist in $M = \coprod M_i$ jedes M_i vollständig und Untermodul eines flachen R -Moduls, gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$.*

Beweis. Aus M rein in \hat{M} folgt $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$, und weil jedes M_i , also auch $\coprod M_i$, also nach $(*)$ auch \hat{M} Untermodul eines flachen R -Moduls ist, ist $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Ass}(R)$ endlich und es folgt Gleichheit. \square

Proposition 3.3 *Sei R ein vollständiger Integritätsring und sei $M = \prod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{a}_i$ ein treuer R -Modul. Dann folgt $0 \in \text{Ass}(\hat{M})$.*

Beweis. Aus $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i = 0$ folgt mit $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_i$, daß $\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_2 \supset \dots$ ist und $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{b}_i = 0$.

Falls R ein Körper, ist nichts zu zeigen. Falls R kein Körper, folgt mit irgendeinem $0 \neq r \in \mathfrak{m}$ für jedes $n \geq 1$, daß $\mathfrak{b}_1 : (r^n) \supset \mathfrak{b}_2 : (r^n) \supset \dots$ ist und $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{b}_i : (r^n) = 0$, also nach dem Theorem von Chevalley [2, Chap. III, §2, Prop. 8] ein $j_n \geq 1$ existiert mit

$\mathfrak{b}_{j_n} : (r^n) \subset \mathfrak{m}^n$. Wir wollen gleich $j_1 < j_2 < j_3 < \dots$ annehmen, und mit $x_i := \overline{r^n} \in R/\mathfrak{a}_i$ für alle $j_{n-1} < i \leq j_n$ leistet dann

$$x = (x_i) = (\bar{r}, \dots, \bar{r}, \bar{r^2}, \dots, \bar{r^2}, \bar{r^3}, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{a}_i$$

das Gewünschte: Für jedes $n \geq 1$ sind fast alle $x_i \in \mathfrak{m}^n \cdot R/\mathfrak{a}_i$, so daß nach (*) folgt $x \in \hat{M}$. Und weil $\text{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{a}_1 : (r^n) \cap \mathfrak{a}_2 : (r^n) \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{j_n} : (r^n) = \mathfrak{b}_{j_n} : (r^n) \subset \mathfrak{m}^n$ ist für alle $n \geq 1$, folgt $\text{Ann}_R(x) = 0$, d.h. $0 \in \text{Ass}(\hat{M})$ wie behauptet. \square

Satz 3.4 Seien in $M = \coprod_{i \in I} M_i$ alle M_i koatomar. Dann gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Koatt}(M)$.

Beweis. Weil M totalepariert, also rein in \hat{M} ist, gilt wieder $\text{Ass}(\hat{M}) \subset \text{Koatt}(M)$. Die Umkehrung zeigen wir in drei Schritten:

1. *Schritt* Ist R vollständig und sind in $M = \coprod_{i=1}^{\infty} M_i$ alle M_i koatomar, gilt $\text{Koatt}(M) \subset \text{Ass}(\hat{M})$. Aus $\text{Koatt}(M_i) = \text{Ass}(M_i)$ für alle $i \in I$ folgt nach [14, Folgerung 1.7] $\text{Koatt}(\prod M_i) = \text{Ass}(\prod M_i)$, so daß zu jedem $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$ ein $y = (y_i) \in \prod M_i$ existiert mit $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(y)$. Weil R/\mathfrak{p} ein vollständiger Integritätsring und $\prod R y_i$ als R/\mathfrak{p} -Modul treu ist, gibt es nach der Proposition ein $x \in \prod R y_i$, so daß $\text{Ann}_{R/\mathfrak{p}}(x) = 0$ ist und für jedes $n \geq 1$ gilt: Fast alle x_i liegen in $\overline{\mathfrak{m}}^n \cdot R y_i$, also in $\mathfrak{m}^n \cdot R y_i \subset \mathfrak{m}^n \cdot M_i$. Damit ist $x \in \hat{M}$ und $\text{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}$ wie gewünscht.

2. *Schritt* Ist R vollständig und sind in $M = \coprod_{i \in I} M_i$ alle M_i koatomar, gilt $\text{Koatt}(M) \subset \text{Ass}(\hat{M})$. Der abzählbare Fall ist der erste Schritt. Sei also I überabzählbar und $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$, d.h. $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M[\mathfrak{p}]) = \bigcap_{i \in I} \text{Ann}_R(M_i[\mathfrak{p}])$. Nach [11, Lemma 2.1] gibt es eine abzählbare Menge mit demselben Durchschnitt, d.h. paarweise verschiedene $i_1, i_2, i_3, \dots \in I$ mit $\mathfrak{p} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \text{Ann}_R(M_{i_m}[\mathfrak{p}])$. $U = \coprod_{m=1}^{\infty} M_{i_m}$ ist direkter Summand von M und $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(U)$, also nach dem 1. Schritt $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(\hat{U}) \subset \text{Ass}(\hat{M})$ wie gewünscht.

3. *Schritt* Ist schließlich R beliebig und M wie oben, sind in $\hat{R} \otimes_R M \cong \coprod_{i \in I} \hat{R} \otimes_R M_i$ alle Summanden als \hat{R} -Moduln koatomar, so daß nach dem 2. Schritt $\text{Koatt}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M) \subset \text{Ass}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M)$ gilt, wegen $\hat{R} \otimes_R M \cong \hat{M}$ nach [10, p.17] also $\text{Koatt}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M) \subset \text{Ass}_{\hat{R}}(\hat{M})$. Sei nun $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$: Mit $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(U)$ und $A = \text{Ann}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R U)$ wird $R/\mathfrak{p} \rightarrow \hat{R}/A$ injektiv, so daß es ein $A \subset Q \in \text{Spec}(\hat{R})$ gibt mit $Q \cap R = \mathfrak{p}$, dazu ein Primideal $A \subset P \subset Q$, das minimal über A ist, und dann ist $P \in \text{Koatt}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R U) \subset \text{Koatt}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_R M)$ sowie $P \cap R = \mathfrak{p}$. Nach dem ersten Teil folgt $P \in \text{Ass}_{\hat{R}}(\hat{M})$, also $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(\hat{M})$ wie gewünscht. \square

Beispiel 3.5 Ist $M = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}^i$, so gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \{\mathfrak{m}\} \cup \text{Ass}(R)$.

Beweis. Nach [14, p.1984] ist $\text{Koatt}(\prod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}^i) = \{\mathfrak{m}\} \cup \text{Ass}(R)$. □

Beispiel 3.6 Ist $M = \prod_{i=1}^{\infty} (R/\mathfrak{m}^i)^0$, so gilt $\text{Ass}(\hat{M}) = \text{Spec}(R)$.

Beweis. Für jedes Primideal \mathfrak{p} gilt, daß $M[\mathfrak{p}] \cong \prod_{i=1}^{\infty} (R/\mathfrak{m}^i + \mathfrak{p})^0$ ist, also $\text{Ann}_R(M[\mathfrak{p}]) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{m}^i + \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$. □

Frage 3 Für welche separierten R -Moduln M gilt $\text{Koatt}(M) \subset \text{Ass}(\hat{M})$?

Bemerkung 3.7 Für einen beliebigen R -Modul M betrachten wir die folgenden drei Bedingungen: (A) $\text{Ass}(M) = \text{Koatt}(M)$, (S) $\text{Supp}(M) = V(\text{Ann}_R(M))$ und (B) $\text{Ass}(M)$ besitzt eine endliche finale Teilmenge. Weil (S) äquivalent damit ist, daß jeder minimale Primdivisor von $\text{Ann}_R(M)$ zu $\text{Ass}(M)$ gehört, gilt stets $(A \Rightarrow S)$ und $(S \Rightarrow B)$. Erfüllen aber alle vollständigen R -Moduln die Bedingung (B), so auch (A): Aus M vollständig und $\mathfrak{p} \in \text{Koatt}(M)$ folgt $M_1 = M[\mathfrak{p}]$ vollständig und $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M_1)$, also nach (1.1) $\mathfrak{p} = \bigcap \text{Ass}(M_1)$ und wegen (B) $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M_1) \subset \text{Ass}(M)$.

Simon stellte in [9, p.244] die bis heute unbeantwortete Frage, ob alle vollständigen R -Moduln die Bedingung (S) erfüllen. Nach dem Vorhergehenden ist das äquivalent mit der Frage, ob *alle* separierten R -Moduln M die Bedingung $\text{Koatt}(M) \subset \text{Ass}(\hat{M})$ erfüllen.

Bemerkung 3.8 Auch unser in [11, p.197] gestelltes Problem ist bis heute ungelöst: Gilt für jeden R -Modul A , daß $\text{Koass}(A)$ eine endliche finale Teilmenge besitzt?

Dabei heißt ein Primideal \mathfrak{p} *koassoziert* zu A , wenn es einen artinschen Faktormodul A/U gibt mit $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(A/U)$, und wegen $\text{Koass}(A) = \text{Ass}(A^0)$ ist unsere Frage äquivalent damit, ob alle dualen R -Moduln $M = A^0$ die Bedingung (B) in (3.7) erfüllen.

Literatur

- [1] J.Bartijn et J.R.Strooker: Modifications monomiales: Springer LNM 1029 (1983) 192-217
- [2] N.Bourbaki: *Algèbre commutative*: Hermann, Paris (1967)
- [3] L.Fuchs, L.Salce and P.Zanardo: Note on the transitivity of pure essential extensions: Colloqu. Math. 78 (1998) 283-291

- [4] P.Griffith: Maximal Cohen–MaCaulay modules and representation theory: J. Pure Appl. Algebra 13 (1978) 321-334
- [5] C.U.Jensen: On the global dimension of the functor category $(\text{mod } R, \text{Ab})$: J. Pure Appl. Algebra 11 (1977) 45-51
- [6] H.Matsumura: *Commutative Ring Theory*: Cambridge Univ. Press (1986)
- [7] R.Raynaud et L.Gruson: Critères de platitude et de projectivité: Invent. math. 13 (1971) 1-89
- [8] C.Rotthaus: On rings with low-dimensional formal fibres: J. Pure Appl. Algebra 71 (1991) 287-296
- [9] A.-M.Simon: Some homological properties of complete modules: Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 108 (1990) 231-246
- [10] J.R.Strooker: *Homological Questions in Local Algebra*: London Math. Soc. LNS 145, Cambridge Univ. Press (1990)
- [11] H.Zöschinger: Über koassozierte Primideale: Math. Scand. 63 (1988) 196-211
- [12] H.Zöschinger: Der Krull’sche Durchschnittssatz für kleine Untermoduln: Arch. Math. 62 (1994) 292-299
- [13] H.Zöschinger: Starke Kotorsionsmoduln: Arch. Math. 81 (2003) 126-141
- [14] H.Zöschinger: Über die assoziierten Primideale des Bidualen: Commun. Algebra 37 (2009) 1977-1994